עופר פרידמן, 032102485
חיליק פרנק, 034946046

מרצה: פרופ' עפר ביהם

תרגיל 3 בקורס 77732, "פיזיקה חישובית של מערכות מורכבות"

תוכן עניינים:

1. פתרון שדה ממוצע.

עבור שדה ממוצע כאשר:

$$c = \frac{N}{L}$$
$$d = 1 - c$$
$$Flux = v\rho = v\frac{N}{L}$$

נרשום משוואות קצב בהנחת שדה ממוצע לצפיפות בכל שלוש המהירויות:

$$\dot{c}_0 = c_1 c + c_2 c - c_0 d(1-p)$$
$$\dot{c}_1 = c_0 d(1-p) + c_2 dc(1-p) + c_2 d^2 p - c_1[c + dcp + d^2(1-p)]$$
$$\dot{c}_2 = c_1 d^2(1-p) - c_2[d^2 p + c + dc]$$

נפתור את המשוואות עבור מצב עמיד $\dot{c}_0 = \dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0$ כמו כן נסכים כי $c = c_0 + c_1 + c_2$ כך נקבל

(לאחר מעט אלגברה):

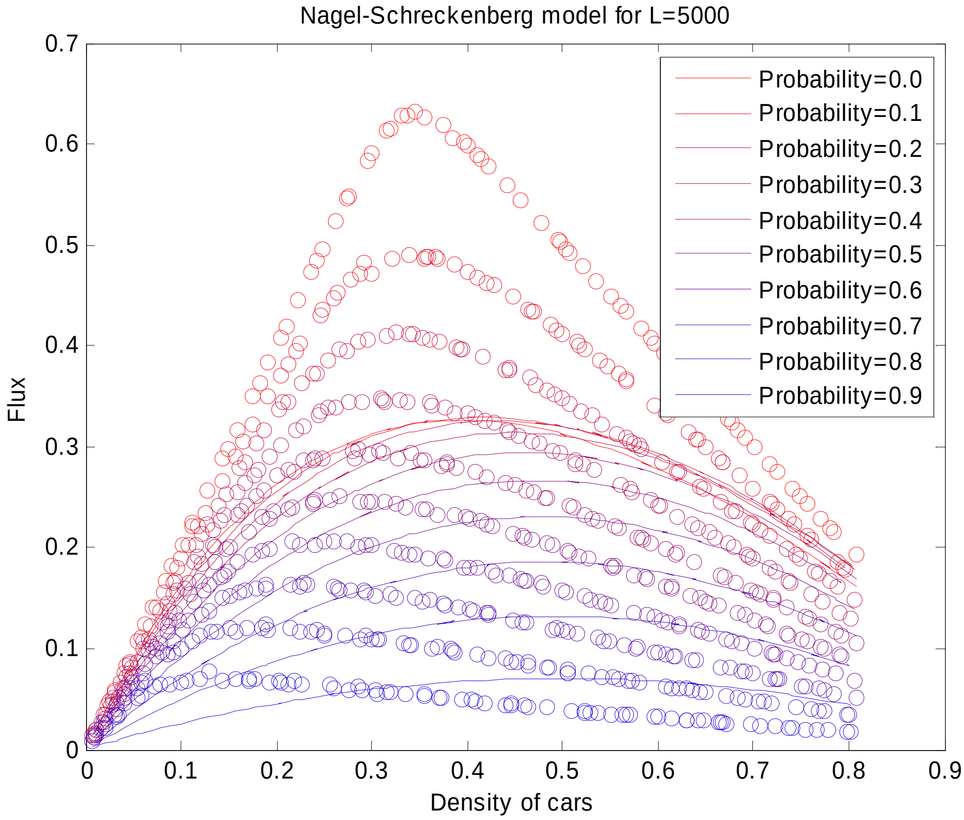
$$c_0 = \frac{c^2(1+dp)}{1-d^2 p}$$
$$c_1 = \frac{cd(1-p)[1-d^2(1-p)]}{1-d^2 p}$$
$$c_2 = \frac{cd^3(1-p)^2}{1-d^2 p}$$

מכאן נחשב את הזרם:

$$Flux = 0 \cdot c_0 + 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = \frac{cd(1-p)[1+d^2(1-p)]}{1-d^2 p}$$

2. סימולציה

הסימולציה בוצע עבור L=5000 בהסתברויות שונות של עצירה



איור 1 - תוצאה אנליטית וסימולציה של המודל, הקוים הם הפתרון האנליטי הנקודות הן תוצאות הסימולציה

ניתן לראות שתי תופעות שונות מהשוואת התוצאות:

- ה-"פתרונות" המתקבלים מהסימולציה טובים יותר (מאפשרים שטף גבוה יותר) מאלה המתקבלים בשדה ממוצע. זה הגיוני בשל העובדה ששדה ממוצע זה לפזר את המכוניות באופן אחיד בעוד שבסימולציה ניתן לראות שבחלק מהפתרונות נוצרים קבוצות של מכוניות המתקדמות ביחד.
- יש הזזה של נקודת המקסימום המתקבלת בסימולציה כלומר $Density(MaxFlux) \propto \frac{1}{p}$ בעוד שבמקרה של הפתרון שדה ממוצע ההתנהגות היא הפוכה.

הלך אקראי

1. חישוב אנליטי

נתבונן בהלך האקראי במיקום כל שהוא, ה"זמן" (בביטוי זמן נשתמש מכאן ולהבא בתור מספר הצעדים) שידרש לחלקיק זה ליפול מן השרשרת כלומר להגיע למקום ה L+1 הוא צעד אחד יותר מאשר יקח לו ליפול לו היה בכל אחד מן האתרים הסמוכים לו ולכן נקבל את סט המשוואות המצומדות הבא:

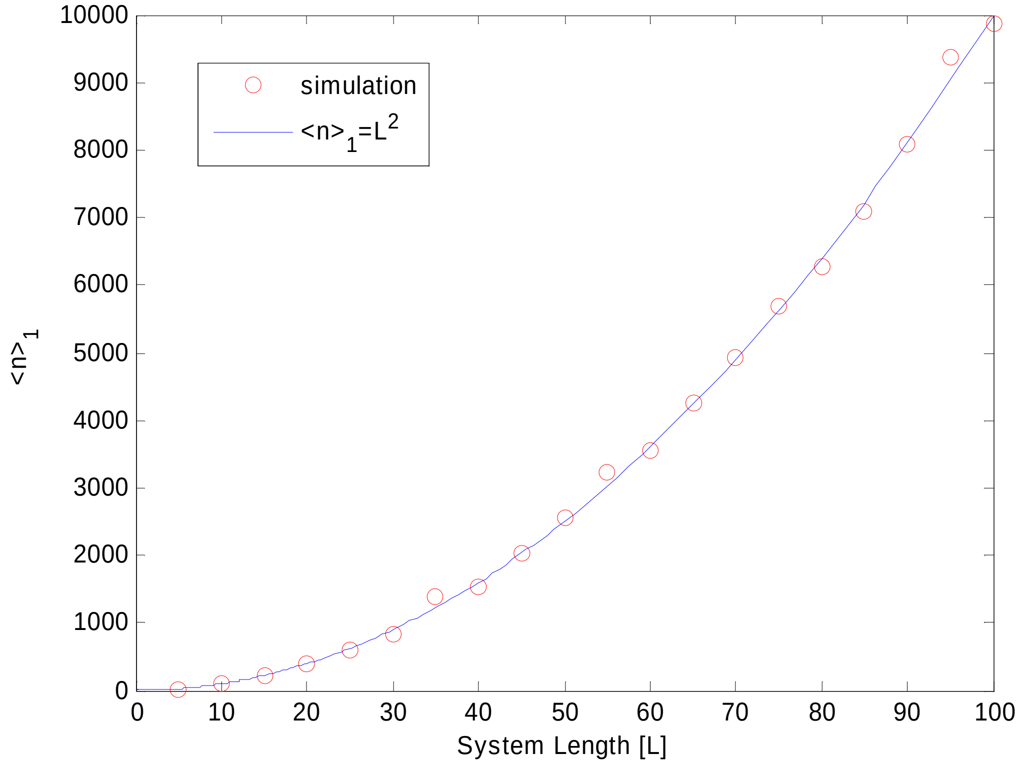
$$
\begin{aligned}
&<n>_1=<n>_2+1\\
&<n>_2=\tfrac{1}{2}(<n>_1+<n>_3)+1\\
&<n>_3=\tfrac{1}{2}(<n>_2+<n>_4)+1\\
&\qquad\vdots\\
&<n>_k=\tfrac{1}{2}(<n>_{k-1}+<n>_{k+1})+1\\
&\qquad\vdots\\
&<n>_L=\tfrac{1}{2}<n>_{L-1}+1
\end{aligned}
$$

כאשר הביטוי $<n>_k$ מסמן את מספר הזמן הממוצע שייקח להלך הנמצא במקום ה K ליפול מן השרשרת. ניתן לראות כי קיבלנו מערכת של L משוואות מצומדות. אם נסכום את כל המשוואות עד המשוואה ה L נקבל: $\tfrac{1}{2}(<n>_1+<n>_L-<n>_2)=L$ כעת אם נציב $<n>_2=<n>_1-1$ נקבל סופית : $<n>_L=2L-1$ כעת נלך אחורה אל תוך השרשרת כדי למצוא את הזמן הממוצע לנפילה מנקודה מספר אחת:

$$
\begin{aligned}
&<n>_L=2L-1=0.5<n>_{L-1}+1\Rightarrow<n>_{L-1}=4L-4\\
&<n>_{L-1}=4L-4=0.5(<n>_{L-2}+<n>_L)+1\Rightarrow<n>_{L-2}=6L-9\\
&<n>_{L-2}=6L-9=0.5(<n>_{L-3}+<n>_{L-1})+1\Rightarrow<n>_{L-3}=8L-16\\
&\qquad\vdots\\
&<n>_{L-k}=2(k+1)L-(k+1)^2
\end{aligned}
$$

ומכאן שעבור $k=L-1$ נקבל: $<n>_1=2L\cdot L-L^2=L^2$

2. סימולציה



איור 2 - סימולצית הלך אקראי למעבר ראשון

ייצור התפלגות חזקתית

כדי ליצר מספר לפי התפלגות חזקתית נבצע "השוואת שטחים" כלומר נניח שהגרלנו מספר במחולל הרנדומי בהתפלגות אחידה וקיבלנו את המספר X (זהו גם השטח של האינטגרל על פונקציית ההתפלגות האחידה עד למספר זה) כעת נדרוש שוויון הסתברות כדי לקבל את המספר x מן ההתפלגות החזקתית:

$$\int_{x_{\min}}^{x} Kx'^{-(\alpha+1)}\,dx' = X \Rightarrow \left[-\frac{K}{\alpha}x'^{-\alpha}\right]_{x_{\min}}^{x} = X$$

$$\Downarrow$$

$$x^{-\alpha} - x_{\min}{}^{-\alpha} = -\frac{\alpha}{K}X \Rightarrow x = \left[x_{\min}{}^{-\alpha} - \frac{\alpha}{K}X\right]^{-1/\alpha}$$

התפלגות log normal

1. ממוצע וסטיית תקן

כדי לקבל את הממוצע והשונות נחשב את המומנט הראשון והשני של המשתנה המפולג באופן log-normal, בתהליך המתואר אם הגרלנו משתנה log-normal בעל ערך x משמעות הדבר היא שבעצם הגרלנו במשתנה הנורמלי את הערך e^x כלומר המומנט הראשון (שהוא כמובן הממוצע) של משתנה X הוא:

$$\langle \mathrm{X} \rangle = \int e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{\frac{-(x-\mu)^2+2x\sigma^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{\frac{-x^2+2x\mu-\mu^2+2x\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{2}} \int e^{\frac{-[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{2}}$$

עבור המומנט השני נקבל:

$$\langle \mathrm{X}^2 \rangle = \int e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{\frac{-(x-\mu)^2+4x\sigma^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{\frac{-x^2+2x\mu-\mu^2+4x\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{2\mu+\sigma^2} \int e^{\frac{-[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} = e^{2\mu+\sigma^2}$$

מכאן נחשב את סטיית התקן:

$$STD(\mathrm{X}) = \sqrt{\langle \mathrm{X}^2 \rangle - \langle \mathrm{X} \rangle^2} = \sqrt{e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}}$$

2. ייצור התפלגות lognormal ממכולל אַקְרָאִי

כדי ליצר מספר X בהסתברות log-normal נייצר מספר Y בהתפלגות נורמלית ואז נחזיר את $Log\mathrm{X} = Y$ בהנתן שיש לנו מחולל בהתפלגות אחידה בתחום $[0,1)$ נלך לפי המרשם שראינו בכיתה כדי ליצר מחולל בהתפלגות נורמלית:

- נחולל שני מספרים במחולל האחיד האחד בתחום $\theta \in [0, 2\pi)$ והשני $t \in [0,1)$.
- נחשב את הרדיוס: $r = \sqrt{-2\sigma^2(1-t)}$
- מכאן נקבל שני מספרים בהתפלגות נורמאלית $y_2 = r\sin(\theta) + \mu$ $\quad y_1 = r\cos(\theta) + \mu$ אקספוננט של שני מספרים אלו יתן לנו שני מספרים בהתפלגות log-normal. $x_2 = e^{r\sin(\theta)+\mu}$ $\quad x_1 = e^{r\cos(\theta)+\mu}$